

## UNA APROXIMACIÓN A LA PROPAGACIÓN DE FISURAS POR FATIGA A TRAVÉS DE LA INTEGRAL J

S. Cicero<sup>1\*</sup>, V. Madrazo<sup>2</sup>, F. Gutiérrez-Solana<sup>1</sup>, JA. Álvarez<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Dpto. Ciencia e Ingeniería del Terreno y de los Materiales, Universidad de Cantabria, Av/ Los Castros s/n, 39005, Santander, Cantabria, España.

<sup>2</sup> Fundación Centro Tecnológico de Componentes (CTC), Parque Científico y Tecnológico de Cantabria (PCTCAN), C/ Isabel Torres nº 1, 39011, Santander, Spain

\*E-mail: [ciceros@unican.es](mailto:ciceros@unican.es)

### RESUMEN

La propagación de fisuras en materiales sometidos a cargas oscilantes, también conocida como fatiga de materiales, ha sido un fenómeno ampliamente estudiado a lo largo del pasado siglo. Probablemente, los dos avances más sobresalientes al respecto han sido las curvas S-N, que nos dan el número de ciclos que para una variación de tensiones determinada es capaz de resistir el material antes de la rotura, y la ley de Paris, que para un material determinado establece la propagación de la fisura por cada ciclo de carga. Esta última tiene un carácter empírico y se ve afectada por una serie de factores como la relación entre la carga mínima y la máxima, la microestructura del material, la frecuencia de la carga o el ambiente en el que trabaja el material. En este artículo se plantea y valida un modelo teórico de propagación de fisuras por fatiga, que para el caso particular de carga mínima nula coincide con la Ley de Paris. Además se justifica el efecto que algunos de los factores mencionados tienen en el proceso de propagación. El modelo se ha aplicado a un acero con el objetivo de validar su aplicación a situaciones prácticas.

### ABSTRACT

The phenomenon of crack propagation in materials subjected to variable loads has been widely studied during the last century. Probably the most important advances in this field are the S-N curves, which provide the number of cycles causing failure for a certain stress variation, and the Paris law, which for a certain material, provides the crack propagation per loading cycle. This law has an empiric nature and is affected by several factors such as the stress ratio, the material's microstructure, the frequency of the applied load or the environment where the material works. In this paper, a theoretical model of crack propagation caused by fatigue is proposed which, for a particular case (when the minimum load is null), coincides with the Paris law. Besides, the effect on the propagation process of some of the factors previously mentioned is also justified. The model has been applied to a steel in order to analyse its application to practical situations.

**PALABRAS CLAVE:** fatiga, ley de Paris, integral J, acero.

### 1. INTRODUCCIÓN

La actuación de cargas oscilantes en un determinado componente o estructura puede ocasionar la aparición y propagación de fisuras. Los micromecanismos que dan lugar a la aparición de la fisura han sido ampliamente estudiados y diversas teorías pueden consultarse en [1-4]. Las fisuras, en caso de que propaguen, terminan alcanzando un tamaño crítico que provoca la rotura del componente estructural, por lo que el estudio del proceso de fatiga tiene una trascendencia técnica y económica indudable.

Una herramienta de diseño muy utilizada es la de las curvas S-N (introducidas por primera vez por Wöhler [5]) junto con la ley de Miner [6]. Estas curvas proporcionan, para un determinado material y nivel de variación de tensiones, el número de ciclos hasta rotura. Si la variación tensional del elemento que se

está diseñando es conocida se obtiene directamente el número de ciclos hasta la rotura y, por lo tanto, la duración del componente. En caso de que la variación de tensiones no sea constante la ley de Miner afirma que la rotura se producirá cuando la suma del daño acumulado en los distintos bloques de cargas sea 1, es decir:

$$\sum \frac{n_i}{N_i} = 1 \quad (1)$$

en donde  $n_i$  es el número de ciclos en los que la variación de tensiones es  $\Delta\sigma_i$  y  $N_i$  es el número de ciclos hasta rotura para esa misma variación tensional. Esta aproximación tiene en ocasiones un importante grado de conservadurismo, ya que no tiene en cuenta la ralentización del proceso de fatiga ocasionado por la introducción de sobrecargas.

En otras ocasiones la fisura está ya presente e interesa conocer la vida residual del componente. En ese caso la ley de Paris [7] es sin duda alguna la herramienta de cálculo más utilizada. Su expresión es la siguiente:

$$\frac{da}{dN} = C(\Delta K)^m = C(1-R)^m K_{\max}^m \quad (2)$$

en donde  $a$  es la longitud de fisura,  $N$  el número de ciclos,  $\Delta K$  es la variación del factor de intensidad de tensiones aplicado y  $C$  y  $m$  son constantes del material.

Si se representa en doble escala logarítmica la propagación de una fisura en función de  $\Delta K$  se obtiene una gráfica similar a la mostrada en la Figura 1, con tres zonas claramente diferenciadas:

- Zona I, en la cual no hay propagación o puede considerarse despreciable. En esta zona  $\Delta K$  es inferior a  $\Delta K_{th}$ , valor umbral por debajo del cual la fisura no propaga.
- Zona II, en la cual es de aplicación la ley de Paris
- Zona III, en la cual la propagación se acelera hasta producir la rotura.

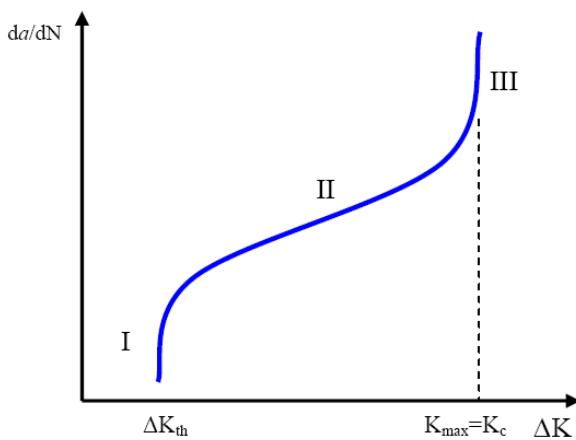


Fig.1. Representación esquemática de los distintos regímenes de propagación de fisuras por fatiga.

Es importante destacar que, para un mismo material, la ley de Paris obtenida (valor de los parámetros  $C$  y  $m$ ) depende fundamentalmente de los siguientes factores [1-4]:

- Nivel de tensión medio
- Relación entre la carga mínima y la carga máxima
- Ambiente
- Frecuencia de la carga
- Tipo de carga
- Estado tensional

Como puede observarse, la Ley de Paris es puramente empírica y explica la propagación de fisuras a través de la mecánica de la fractura elástico-lineal, lo cual lleva implícitas algunas limitaciones (asociadas al tamaño de la zona plástica existente). Un ejemplo son las fisuras cortas, definidas como aquellas cuyo tamaño es comparable a la escala de las variables microestructurales características del material (tamaño de grano en metales, espaciado entre partículas en compuestos reforzados con partículas...) [8]. En estos casos, en los cuales la ley de Paris no da resultados satisfactorios, la propagación de fisuras se ajusta a una expresión del tipo [9]:

$$\frac{da}{dN} = C_J (\Delta J_{eff})^{m_J} \quad (3)$$

en donde  $\Delta J_{eff}$  es la variación efectiva de la integral  $J$  aplicada y  $C_J$  y  $m_J$  son constantes del material [10]. Esta expresión, a pesar de sus incongruencias teóricas, proporciona resultados sorprendentemente aproximados en el análisis de fisuras cortas (tamaño de la zona plástica similar al de la fisura) y en el de fisuras de mayor tamaño en componentes altamente plastificados [2,9].

Tanto la ley de Paris, como su equivalente expresión en el campo elastoplástico, son empíricas y no han sido justificadas teóricamente de forma satisfactoria. En este artículo se presenta una justificación teórica de las mismas que además explica el efecto de algunos factores ( $R$ , tensión media, microestructura) en la propagación de fisuras en un determinado material.

## 2. LA INTEGRAL J

La resistencia a fractura del material puede expresarse en términos de la integral  $J$  [ej. 11-13], denominándose  $J_R$ . El valor de este parámetro depende de la propagación estable de fisura producida (ver Figura 2), de tal forma que puede expresarse de la siguiente manera:

$$J_R = J_R(\Delta a) \quad (4)$$

En general,  $J_R$  se ajusta a expresiones del tipo:

$$J_R = B(\Delta a)^n \quad (5)$$

en donde  $B$  y  $n$  son constantes del material.

El análisis de un componente fisurado sometido a una determinada carga puede realizarse a través de los Diagramas de Fuerza Motriz de Agrietamiento o "Crack Driving Force Diagrams" (CDFD's). En ellos se compara la integral  $J$  aplicada con la curva resistente  $J_R$  del material, tal y como muestra la Figura 2.

La situación de rotura se alcanza cuando se dan dos condiciones:

$$J_{ap} = J_R(\Delta a) \quad (6)$$

$$\frac{dJ_{ap}}{da} = \frac{dJ_R}{da} \quad (7)$$

Previamente a la rotura se produce una propagación estable de la fisura de valor  $\Delta a_s$ . En el caso de aplicar una carga inferior a la crítica no se produce rotura pero sí se genera la correspondiente propagación estable de la fisura. En cualquiera de los dos casos (carga de rotura o carga inferior a la de rotura), en la intersección de las curvas  $J_{ap}$  y  $J_R$  se cumple:

$$J_{ap} = J_R(\Delta a) = B(\Delta a)^n \quad (8)$$

Despejando el valor de  $\Delta a$  se obtiene:

$$\Delta a = \frac{1}{B^{1/n}} J_{ap}^{1/n} \quad (9)$$

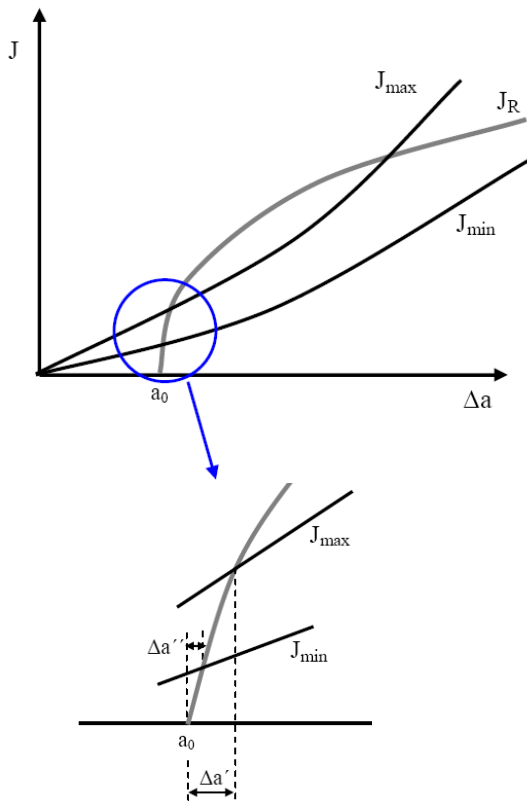


Fig. 2. Propagación estable de fisura en un ciclo de carga haciendo uso del concepto de integral J.

### 3. APLICACIÓN DE LA INTEGRAL J A LA FATIGA

Tal y como muestra la Figura 2, si se analiza un determinado ciclo de carga de un proceso de fatiga en

un Diagrama de Fuerza Motriz se obtiene que el valor de la propagación en dicho ciclo resulta:

$$\begin{aligned} \Delta a &= \Delta a' - \Delta a'' = \frac{1}{B^{1/n}} J_{\max}^{1/n} - \frac{1}{B^{1/n}} J_{\min}^{1/n} = \\ &= \frac{1}{B^{1/n}} (J_{\max}^{1/n} - J_{\min}^{1/n}) \end{aligned} \quad (10)$$

En el siguiente ciclo ha de tenerse en cuenta la situación de carga máxima anteriormente alcanzada, la cual ha producido una determinada propagación. En consecuencia, la curva  $J_R$  se desplaza según el eje de abscisas esa misma cuantía. Al aplicar un nuevo ciclo, la propagación no comienza desde un valor de  $J_{ap}$  nulo, sino desde el correspondiente a la carga mínima.

La expresión (10) proporciona la propagación de fisura en un determinado ciclo, por lo que la ley de propagación de fisuras resulta:

$$\frac{da}{dN} = D'(J_{\max}^{m_1'} - J_{\min}^{m_1'}) \quad (11)$$

en donde

$$D' = \frac{1}{B^{1/n}} \quad (12)$$

$$m_1' = 1/n \quad (13)$$

El razonamiento seguido no tiene en cuenta el fenómeno de la no linealidad que aparece en el campo elasto-plástico. A pesar de ello, expresiones análogas como la ecuación (3) han proporcionado buenos resultados en la práctica. En el caso de que sea de aplicación la mecánica de la fractura elástico-lineal el problema de la no linealidad desaparece y (10) se puede transformar en:

$$\begin{aligned} \Delta a &= \frac{1}{B^{1/n}} \frac{K_{\max}^{2/n}}{E^{1/n}} - \frac{1}{B^{1/n}} \frac{K_{\min}^{2/n}}{E^{1/n}} = \\ &= \frac{1}{(BE')^{1/n}} (K_{\max}^{2/n} - K_{\min}^{2/n}) \end{aligned} \quad (14)$$

La ley de propagación de fisuras resulta:

$$\frac{da}{dN} = C'(K_{\max}^{m'} - K_{\min}^{m'}) \quad (15)$$

en donde

$$C' = \frac{1}{(BE')^{1/n}} \quad (16)$$

$$m' = 2/n \quad (17)$$

$$E' = \frac{E}{(1-\nu^2)} \quad (18)$$

En el caso de que la carga mínima sea nula ( $R=0$ ), la ecuación (15) coincide con la ley de Paris y los parámetros de esta última podrían obtenerse directamente de la expresión de  $J_R$  a través de las ecuaciones (16) y (17).

La ecuación (15) puede ser expresada en términos de  $K_{max}$  y la relación de tensiones  $R=\sigma_{min}/\sigma_{max}=K_{min}/K_{max}$ , con objeto de facilitar su representación gráfica, resultando:

$$\frac{da}{dN} = C(1-R^{m'}) (K_{max}^{m'}) \quad (19)$$

Las constantes  $C$  y  $m'$  son independientes de la tensión media aplicada y de  $R$ , al contrario de lo que sucede en la ley de Paris. La razón es que, al contrario que en esta ley, (15) incluye el efecto de ambas variables.

En efecto, supongamos un mismo material en dos situaciones de carga distintas ( $\sigma_{1max}$ - $\sigma_{1min}$  y  $\sigma_{2max}$ - $\sigma_{2min}$ ) pero en las que la variación del factor de intensidad de tensiones es la misma (igual  $\Delta\sigma$ ). En este caso, tanto la tensión media como  $R$  son distintas en cada caso. La propagación en el campo elástico (el razonamiento en situaciones plásticas sería similar pero utilizando la integral  $J$  en vez de  $K$ ) sería:

$$\Delta a_1 = C(1-R_1^{m'}) K_{max1}^{m'} \quad (20)$$

$$\Delta a_2 = C(1-R_2^{m'}) K_{max2}^{m'} \quad (21)$$

Dado que por las hipótesis del problema se cumple:

$$K_{max1} - K_{min1} = K_{max2} - K_{min2}$$

y siendo

$$R_1 = \frac{K_{min1}}{K_{max1}} \quad R_2 = \frac{K_{min2}}{K_{max2}} \quad (22)$$

resulta:

$$\Delta a_2 = C \left( \frac{(1-R_1)^{m'}}{(1-R_2)^{m'}} \right) (1-R_2^{m'}) K_{max1}^{m'} \quad (23)$$

Si ahora suponemos que  $R_2$  es nula, se obtiene:

$$\Delta a_2 = C(1-R_1)^{m'} (K_{max1}^{m'}) \quad (24)$$

Comparando (20) con (24) se observa que para valores de  $m'$  mayores de 1, lo cual ocurrirá en la práctica totalidad de los materiales,  $\Delta a_2$  resulta menor que  $\Delta a_1$ , por lo que al aumentar la tensión media la propagación de la fisura se hace mayor. Esto concuerda con los resultados que se obtienen en la práctica, ya que si comparamos la propagación de fisuras en un mismo material para distintos valores de  $R$  o de tensión media se obtienen resultados como los mostrados en la Figura 3. Según el modelo propuesto, al aumentar  $R$  la ley de propagación resultante se desplaza de forma paralela hacia velocidades de propagación mayores.

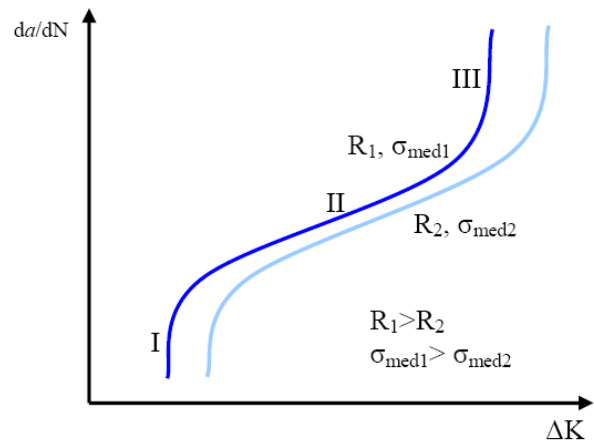


Fig. 3. Representación esquemática del efecto de la tensión media en la propagación de fisuras.

De forma más general ( $R_2 \neq 0$ ), la relación entre  $\Delta a_1$  y  $\Delta a_2$  resulta:

$$\Delta a_1 = \frac{(1-R_1^{m'})(1-R_2)^{m'}}{(1-R_1)^{m'}(1-R_2^{m'})} \Delta a_2 \quad (25)$$

De nuevo, para valores de  $m'$  mayores de 1, la propagación de fisura es mayor a medida que aumenta el nivel medio de carga.

Es importante observar que, siguiendo la ley de Paris, para caracterizar el material en las dos situaciones anteriores sería necesario realizar ensayos en ambas condiciones, ya que las constantes  $C$  y  $m$  variarían. Sin embargo, siguiendo el razonamiento propuesto en este artículo, un ensayo  $J_R$  o un solo ensayo en el cual se recogiese la relación  $da/dN$ - $K_{max}$  bastaría para caracterizar el material en cualquier situación de carga (en lo relativo a  $R$  y a la tensión media). Esta independencia respecto a la carga viene dada por el hecho de que en el modelo propuesto la fatiga no viene gobernada por la variación del factor de intensidad de tensiones, aunque sí está relacionada con los valores  $K_{max}$  y  $K_{min}$ .

En este modelo teórico el efecto de la microestructura del material tiene una consecuencia directa en la  $J_R$  del material, de tal manera que ante una variación microestructural cambia la resistencia a fractura y por tanto la ley de propagación de fisuras.

#### 4. APLICACIÓN DEL MODELO

El modelo se ha aplicado a resultados experimentales recogidos en la literatura (Wilson [14]), en donde quedan recogidas la ley de parís y la curva  $J_R$  de un acero A588 Grade A en dos situaciones diferentes: acero convencional (CON) y acero con tratamiento de calcio (CAT). En ambos casos las propiedades del material se obtuvieron en las orientaciones LT, TL y SL. La Tabla 1 muestra una comparación entre los parámetros experimentales ( $m$  and  $C(1-R)^m$ ) y las predicciones del modelo ( $m'$  and  $C'(1-R^m)$ ), en tanto que las figuras 4 y 5 recogen las velocidades de propagación correspondientes.

Los resultados revelan que las predicciones de  $m$  (aquí denominadas  $m'$ ) son mayores que las experimentales. En cuanto a la predicción de  $C(1-R)^m$  (denominada  $C'(1-R^m)$ ), los valores obtenidos son inferiores a los experimentales. Sin embargo, la predicción global es razonablemente similar a las leyes de propagación obtenidas experimentalmente.

Tabla 1. Comparación entre los valores de  $C(1-R)^m$  de la ley de Paris Law y los valores  $C'(1-R^m)$  del modelo experimental ( $da/dN$  en m/ciclo y  $K_{max}$  en  $MPa \cdot m^{1/2}$ ).

Mat.	Orient.	$m$	$m'$	$C(1-R)^m$	$C'(1-R^m)$
CON	TL	3.50	6.21	9.47 E-13	7.15 E-18
CON	LT	3.17	4.02	2.62 E-12	1.57 E-13
CON	SL	4.39	5.49	8.81E-14	2.61 E-15
CAT	TL	2.99	4.92	5.01E-12	3.73 E-16
CAT	LT	2.97	4.25	5.39 E-12	1.06 E-14
CAT	SL	3.10	4.86	3.77 E-12	9.63 E-16

#### 5. CONCLUSIONES

Este artículo presenta una aproximación teórica a la propagación de fisuras por fatiga haciendo uso de la integral  $J$ . El modelo resultante no trata de dar una predicción exacta de los parámetros del material a fatiga, si no proporcionar una explicación, al menos parcialmente, de leyes de propagación de fisuras como la ley de Paris o las expresiones utilizadas para la propagación de fisuras cortas. Representa los siguientes avances:

- Puede aplicarse en situaciones lineales y no lineales (ej., fisuras cortas).
- Puede particularizarse a la ley de Paris cuando  $R=0$ , justificando teóricamente dicha ley.

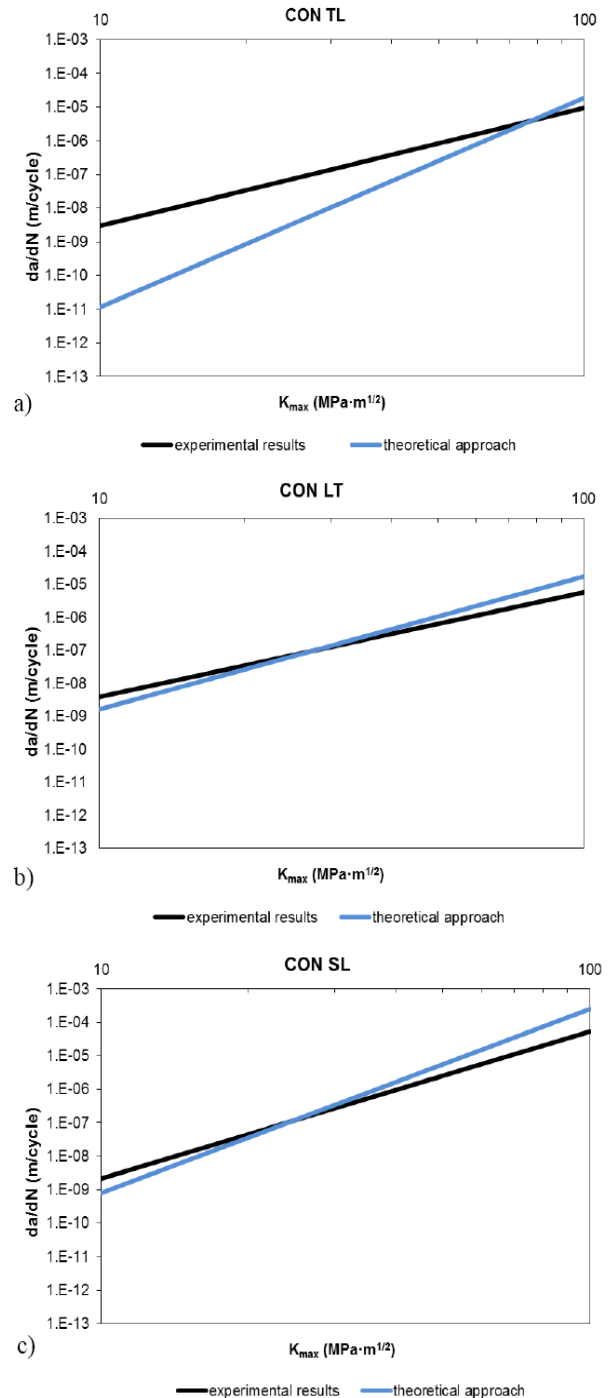


Fig. 4. Comparación entre los resultados experimentales y las predicciones del modelo en acero A588 Grade A (CON). a) orientación TL; b) orientación LT; c) orientación SL.

- Predice el efecto de  $R$  o de la tensión media en la velocidad de propagación..
- En teoría permite la obtención de la ley de propagación para cualquier valor de  $R$  a partir de la curva  $J_R$ , o a partir de una ley  $da/dN - K_{max}$  obtenida experimentalmente con un  $R$  determinado.

- El efecto de la microestructura en la ley de Paris puede justificarse a partir del efecto de la microestructura en la curva  $J_R$ .

La aplicación del modelo a un acero A588 Grade A ha proporcionado predicciones sensiblemente similares a los resultados experimentales.

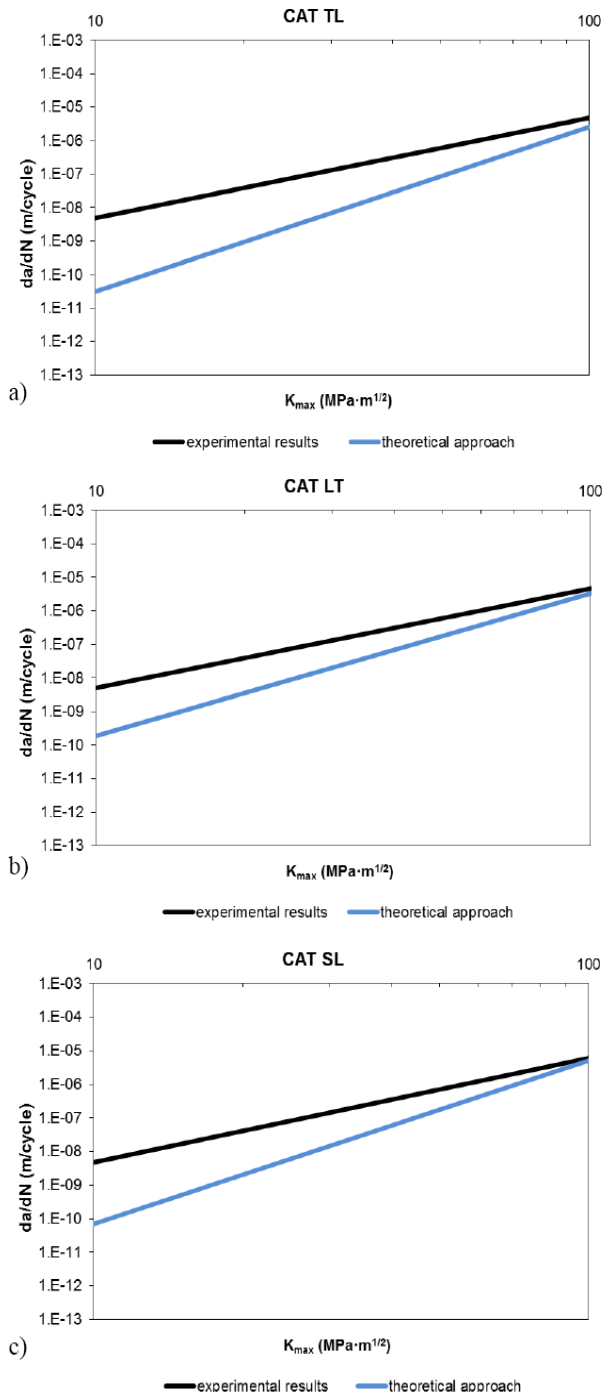


Fig. 5. Comparación entre los resultados experimentales y las predicciones del modelo en acero A588 Grade A (CAT). a) orientación TL; b) orientación LT; c) orientación SL.

## REFERENCIAS

- [1] R. Cazaud, *Fatigue of Metals*, Philosophical Library, New York, 1953.
- [2] S. Suresh, *Fatigue of Materials*, 2nd Edition, Cambridge Solid State Science Series, Cambridge University Press, 2006.
- [3] J.A. Bannantine, *Fundamentals of Metal Fatigue Analysis*, Prentice Hall, 1989.
- [4] R. I. Stephens et al., *Metal Fatigue in Engineering*, Wiley-Interscience, 2000.
- [5] A. Wöhler, Versuche über die Festigkeit der Eisenbahnwagenachser, *Zeitschrift für Bauweser* **10**, 1860.
- [6] M.A. Miner, Cumulative Damage in Fatigue, *Journal of Applied Mechanics* **12**, 159-164, 1945.
- [7] P.C. Paris, M.P. Gomez, W.P. Anderson, A Rational Analytic Theory of Fatigue, *The Trend in Engineering* **13**, 9-14, 1961.
- [8] S. Suresh, R.O. Ritchie, Propagation of Short Fatigue Cracks, *International Metals Reviews* **29**, 445-476, 1984.
- [9] N.E. Dowling, Crack Growth during Low-cycle Fatigue of Smooth Axial Specimens, in: *Cyclic Stress-Strain and Plastic Deformation Aspects of Fatigue Crack Growth*, Special Technical Publication 637, American Society for Testing and Materials, Philadelphia, pp. 97-121, 1977.
- [10] FITNET FFS Procedure (Draft MK8), Prepared by European Fitness for Service Thematic Network, contract GIRT-CT-2001-05071, 5th European Framework, 2006.
- [11] T.L. Anderson, *Fracture Mechanics: Fundamentals and Applications*, 3rd Edition, CRC, Florida, 2005.
- [12] M.F. Kanninen, C.H. Popelar, *Advanced Fracture Mechanics*, Oxford University Press, UK, 1985.
- [13] D. Broek, *Elementary Engineering Fracture Mechanics*, 2nd Edition, Springer, 2004.
- [14] Wilson, A.D., Influence of Inclusions on the Fracture Properties of A588A Steel, in: *Special Technical Testing Publication 833*, American Society for Testing and Materials, Philadelphia, pp. 412-435, 1984.